Conteúdo programático:

Quadripolos

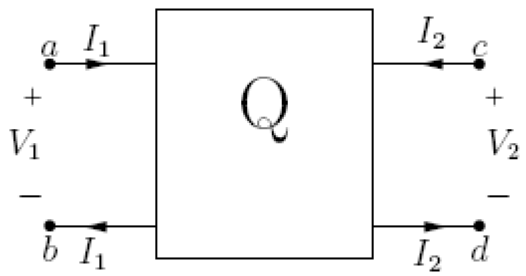
Notas de aula e exercícios:

1. Apresentação do Tópico

Um dos principais métodos de análise de circuitos consiste na substituição de blocos complexos em circuitos equivalentes mais simples. Esse conceito foi trabalhado na análise de circuitos com dois terminais, através do equivalente Thévenin e do equivalente Norton.

Contudo, nem toda parte de um circuito pode ser analisada como um equivalente a dois terminais. Muitas vezes precisamos analisar uma parte de um circuito como um equivalente a quatro terminais (também chamado de equivalente a duas portas), no qual existe alguma coisa conectada nos dois terminais de um lado e outra coisa conectada aos dois terminais do outro lado. Por exemplo, circuitos de transformadores, linhas de transmissão, amplificadores e outros são circuitos analisados através do modelo de quadripolos.

A figura abaixo representa o modelo geral de um quadripolo Q a duas portas (**a** e **b** formam uma porta, pois a corrente que entra pelo terminal **a** é a mesma que sai pelo terminal **b**; da mesma forma, **c** e **d** formam a segunda porta).



O comportamento de um quadripolo é descrito através de quatro variáveis: a tensão (V_1) e a corrente (I_1) de entrada, e a tensão (V_2) e a corrente (I_2) de saída. Estas quatro variáveis serão combinadas em um sistema de equações, ficando duas variáveis dependentes e duas independentes. De acordo com a combinação escolhida para essas variáveis, os coeficientes das equações apresentarão um significado diferente, conforme apresentaremos à frente.

Contudo, a análise de quadripolos pelos parâmetros do modelo somente pode ser utilizada quando a parte do circuito analisada possui as seguintes características:

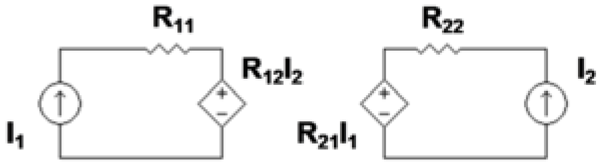
- O pedaço de circuito analisado não armazena energia (as condições iniciais são nulas);
- O pedaço de circuito analisado não possui fontes independentes;
- Não existe uma ligação direta entre a porta de entrada e a porta de saída (ou seja, não existe um curto entre **a** e **c** ao mesmo tempo em que entre **b** e **d**).

2. Parâmetros do Modelo

a. Parâmetros de Impedância (Z ou R).

Os parâmetros de impedância são aqueles que relacionam as tensões V_1 e V_2 em função das correntes I_1 e I_2. Podem ser representados por resistores (R) ou, no modelo mais geral, por impedâncias (Z).

A figura e o conjunto de equações abaixo mostram o circuito equivalente geral para a descrição nesse modelo.



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Observe que os parâmetros Z_{11}, Z_{12}, Z_{21} e Z_{22} podem ser obtidos diretamente do circuito, através de ensaios com a corrente de entrada (I_1) ou com a corrente de saída (I_2) zeradas:

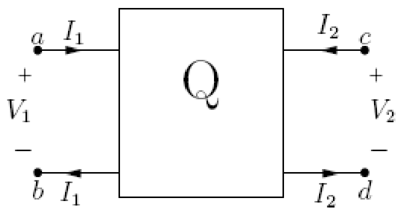
$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Exemplo:

Considere que o quadripolo Q desconhecido da figura abaixo foi avaliado nos seguintes ensaios:

- Com uma fonte de tensão de 10 V em V_1 e deixando a porta **cd** aberta, I_1 = 2mA e V_2 = 5 V;
- Com uma fonte de tensão de 10 V em V_2 e deixando a porta **ab** aberta, I_2 = 5mA e V_1 = 10 V.



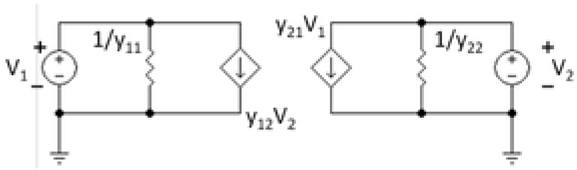
Pergunta-se: qual o valor de V_1 e de V_2 quando uma fonte de corrente de 5mA for colocada na porta **ab** e uma fonte de corrente de 1 mA for colocada na porta **cd**?

RESPOSTA: V_1 = 27 V e V_2 = 14,5 V.

b. Parâmetros de Admitância (Y).

Os parâmetros de admitância são aqueles que relacionam as correntes I_1 e I_2 em função das tensões V_1 e V_2. Podem ser representados por condutâncias (G) ou, no modelo mais geral, por admitâncias (Y).

A figura e o conjunto de equações abaixo mostram o circuito equivalente geral para a descrição nesse modelo.



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Observe que os parâmetros Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} e Y_{22} podem ser obtidos diretamente do circuito, através de ensaios com a tensão de entrada (V_1) ou com a tensão de saída (V_2) zeradas:

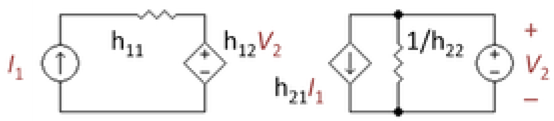
$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

c. Parâmetros Híbridos (H)

Os parâmetros híbridos são aqueles que relacionam uma corrente de uma porta e a tensão da outra porta (por exemplo, V_1 e I_2) em função das outras grandezas tensão e corrente (no exemplo, I_1 e V_2). Esse modelo normalmente é usado para descrever circuitos transistorizados.

A figura e o conjunto de equações abaixo mostram o circuito equivalente geral para a descrição nesse modelo.



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Observe que os parâmetros H_{11}, H_{12}, H_{21} e H_{22} podem ser obtidos diretamente do circuito, de forma semelhante aos casos anteriores:

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

d. Parâmetros de Transmissão (T) ou Matriz ABCD

Os parâmetros de Transmissão relacionam a entrada com a saída, ou a saída com a entrada. Estes parâmetros são utilizados principalmente para análise de associações em cascata, como veremos adiante.

Dessa forma, os parâmetros de transmissão possuem uma notação diferente das anteriores no que diz respeito à polaridade da corrente I_2: I_2 é definida neste caso como a corrente que sai do quadripolo pelo terminal **c**, e não como a corrente que entra neste terminal.

Em notação matricial, os parâmetros de transmissão são representados pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Observe que os parâmetros A, B, C e D podem ser obtidos diretamente do circuito, de forma semelhante aos casos anteriores:

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \qquad B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$
$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \qquad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

A matriz de transmissão apresentada acima também é chamada de matriz de transmissão em ordem direta, pois no sistema de equações resultante as variáveis da entrada são calculadas em função das variáveis da saída. Em muitos casos também é usada a matriz de transmissão em ordem inversa, que é a matriz que relaciona as variáveis de saída como função das variáveis de entrada. Por álgebra matricial podemos provar que a matriz de transmissão em ordem inversa é igual à matriz inversa da original.

3. Teorema da Reciprocidade e Quadripolos Recíprocos

O teorema da reciprocidade diz que, num circuito linear, com condições iniciais nulas, sem nenhuma fonte dependente e com apenas uma fonte independente, se alterarmos a posição dessa fonte pela posição do instrumento de medida análogo, a medida permanecerá a mesma.

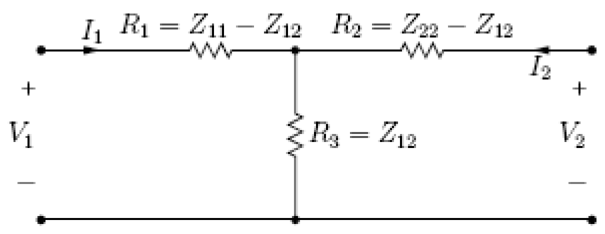
Em outras palavras, considerando um circuito linear passivo (sem fontes dependentes nem independentes) e colocando uma fonte de tensão ideal num ramo deste circuito e um amperímetro ideal em outro ramo, se trocarmos a fonte e o amperímetro de posição, mantendo o mesmo valor da fonte, teremos a mesma leitura no amperímetro. Da mesma forma, se alterarmos uma fonte de corrente e um voltímetro de posição, a tensão medida permanecerá a mesma.

Aplicando este teorema na análise de quadripolos, veremos que, em quadripolos recíprocos, quando excitados com apenas uma fonte de tensão em V_1, e medindo-se uma corrente I_2 com a saída em curto, se curto-circuitarmos a entrada e colocarmos uma fonte V_2 de valor de V_1, mediremos I_1 com o valor que antes aparecia em I_2.

Pela análise desse efeito, verificamos que quadripolos recíprocos apresentarão as seguintes características:

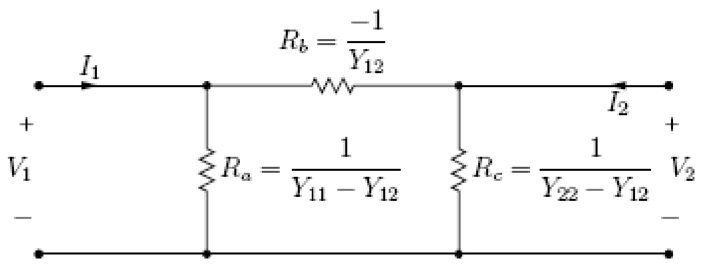
- $Z_{12} = Z_{21}$
- $Y_{12} = Y_{21}$
- $H_{12} = -H_{21}$
- O determinante da matriz de transmissão é unitário, ou seja, AD – BC = 1
- A matriz de transmissão inversa será $\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$

Quadripolos recíprocos também podem ser representados por modelos puramente resistivos, que são mais simples de serem analisados, conforme os modelos de circuito T ou π apresentados abaixo.



Como pode ser visto na figura ao lado, as resistências que completam o modelo T são calculadas diretamente dos parâmetros de impedância do quadripolo.

Como pode ser visto na figura ao lado, as resistências que com-pletam o modelo π são calculadas diretamente dos parâmetros de admitância do quadripolo.



4. Transformação de parâmetros

Na maioria dos casos, quadripolos poderão ser representados por qualquer um dos modelos apresentados aqui (existem exceções: quando um dos coeficientes da matriz equivalente a um dos modelos torna-se infinito, o circuito não pode ser representado por este modelo).

Como estes modelos são representados através de sistemas de equações lineares, a simples manipulação algébrica é suficiente para comprovar a equivalência entre dois modelos, e para converter os parâmetros de um modelo em outro.

A transformação de parâmetros é muito útil na simplificação da análise: a solução é sempre mais simples quando as variáveis conhecidas são usadas como os elementos independentes do sistema.

CARTA DE CONVERSÃO DE MATRIZES DE QUADRIPOLOS

	Z	Y	T	T'	H	G
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta Y} & \frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta G}{g_{11}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta Z} & \frac{-z_{12}}{\Delta Z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta Z} & \frac{z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta T}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & \frac{-1}{B'} \\ \frac{-\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ \frac{-\Delta Y}{y_{21}} & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{\Delta T'} & \frac{D'}{\Delta T'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta H}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta G}{g_{21}} \end{matrix}$
T'	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta Z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-y_{11}}{y_{12}} & \frac{-1}{y_{12}} \\ \frac{-\Delta Y}{y_{12}} & \frac{-y_{22}}{y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta G}{g_{12}} & \frac{-g_{22}}{g_{12}} \\ \frac{-g_{11}}{g_{12}} & \frac{-1}{g_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta Y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ \frac{-\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta G} & \frac{-g_{12}}{\Delta G} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta G} & \frac{g_{11}}{\Delta G} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta Z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{-y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & \frac{-1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & \frac{-h_{12}}{\Delta H} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$

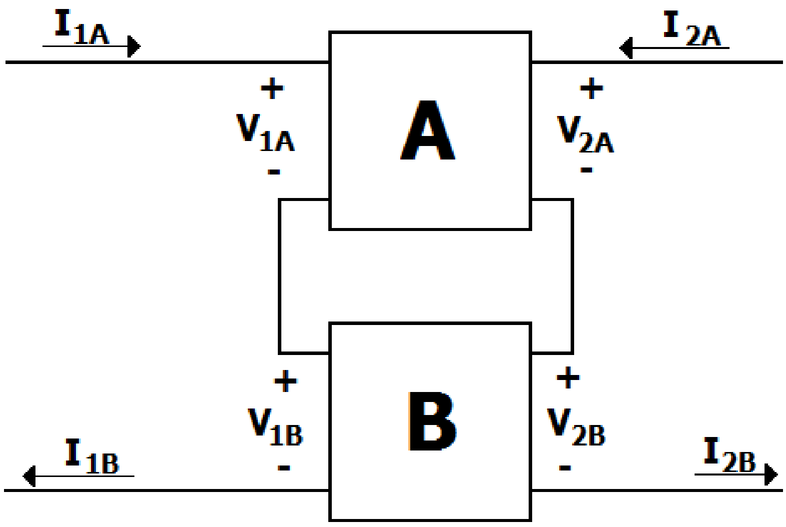
5. Associação de quadripolos

Ao associarmos dois quadripolos, obtemos um novo quadripolo que pode ser representado pela associação dos parâmetros dos dois primeiros.

As topologias mais comuns de associação de quadripolos são: em série, em paralelo e em cascata.

a. Associação em série

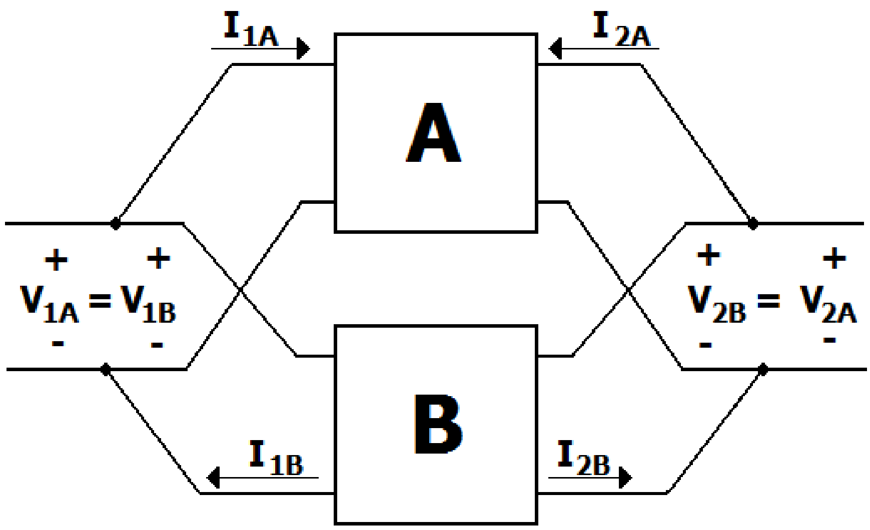
Dois quadripolos **A** e **B** são ditos em série quando a corrente I_1 que sai pelo terminal **b** do quadripolo **A** entra pelo terminal **a** do quadripolo **B**, ao mesmo tempo em que a corrente I_2 que sai do terminal **d** do quadripolo **A** entra pelo terminal **c** do quadripolo **B**, conforme a figura abaixo.



Quando dois quadripolos estão associados em série, o quadripolo resultante tem a matriz de impedância igual a soma das matrizes de impedância dos quadripolos originais.

b. Associação em paralelo

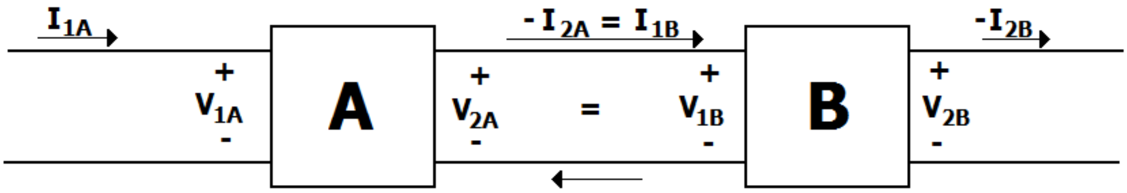
Dois quadripolos **A** e **B** são ditos em paralelo quando os terminais **a**, **b**, **c** e **d** estão diretamente conectados, conforme a figura abaixo.



Quando dois quadripolos estão associados em paralelo, o quadripolo resultante tem a matriz de admitância igual a soma das matrizes de admitância dos quadripolos originais.

c. Associação em cascata

Dois quadripolos **A** e **B** são ditos em cascata quando a corrente I_2 que sai pelo terminal **c** do quadripolo **A** entra pelo terminal **a** do quadripolo **B**, ao mesmo tempo em que a corrente I_1 que sai do terminal **b** do quadripolo **B** entra pelo terminal **c** do quadripolo **A**, conforme a figura abaixo.

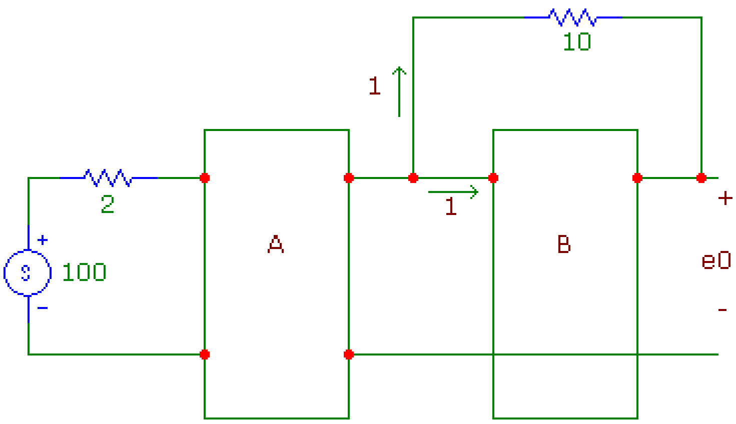


Quando dois quadripolos estão associados em cascata, o quadripolo resultante tem a matriz de transmissão igual ao produto das matrizes de transmissão dos quadripolos originais.

6. Exercícios

1) Determine R11 e R22 de "B" (puramente resistivo) e a tensão e0, sabendo que:
a)Quadr. "A" E1=38 I1 + 20 I2 e E2=20 I1 + 22 I2

b)R12 do Quad. "B"=2



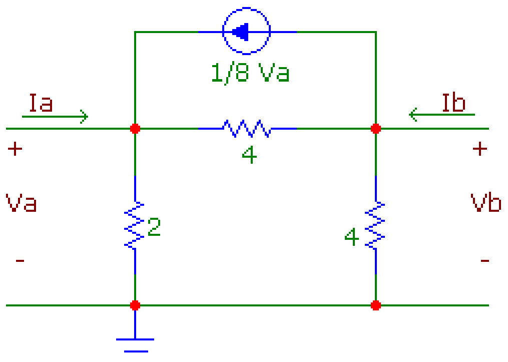
Resposta: R11=24, R22=14, e0=16,

2) O quadripólo do circuito abaixo pode ser descrito pelas equações:

$I_b = a\,V_b + b\,I_a$

$I_a = c\,V_a + d\,I_b$

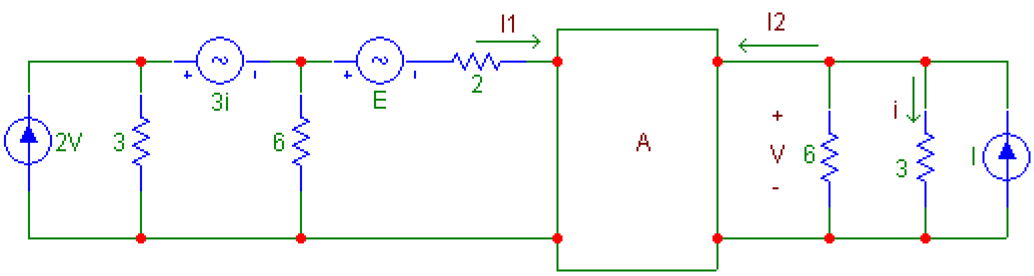
Determine a, b, c, d



Resposta: a=9/20, b=-1/5, c= 9/16, d= -1/2

3) Para o circuito abaixo: E=10 I=5 → i=2 e E=Ex I=10 → I2=4
Para o Quadripólo A: I1=1,5 E1 – E2 e I2= - E1 + YE2

Determine Ex e Y



Resposta: Ex=20, Y=8/7