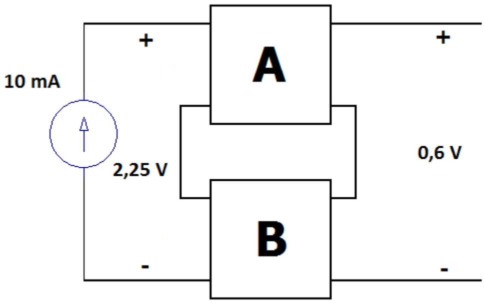
ULBRA

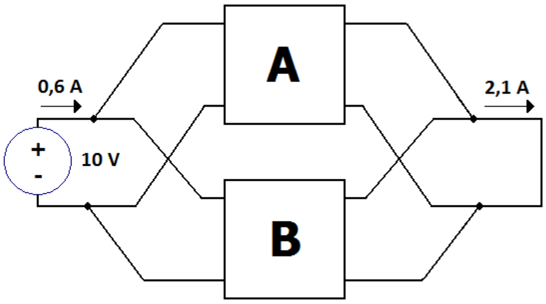
UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Análise de Engenharia de Circuitos Elétricos

Terceira Verificação

1. Prova A: Observe os ensaios abaixo com associação entre os quadripolos A e B.





a. Sabendo que B é descrito pelo modelo abaixo, obtenha o modelo de impedância do quadripolo A.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1}{100} - \dfrac{V_2}{200} \\ I_2 = -\dfrac{V_1}{100} + \dfrac{V_2}{40} \end{cases}$$

Resposta:

No desenho à esquerda, A e B estão associados em série, resultando em um quadripolo que iremos chamar de C. Pelo formato da associação, sabemos que o modelo de impedância do quadripolo C é igual a soma dos modelos de impedância de A e B.

Como B foi definido pelo modelo de admitância, a primeira etapa da solução do problema é identificar o modelo de impedância de B:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{100} & \dfrac{-1}{200} \\ \dfrac{-1}{100} & \dfrac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 25 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Além disso, dos dados do ensaio, sabemos que, para o quadripolo C:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{2{,}25\ V}{10\ mA} = 225\Omega$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0{,}6\ V}{10\ mA} = 60\Omega$$

Assim, como C = A + B, então A = C – B. Portanto:

$Z_{11A} = 225 - 125 =$ 100 Ω e $Z_{12A} = 60 - 50 =$ 10 Ω

Por sua vez, no desenho à direita, A e B estão associados em paralelo, resultando em um quadripolo que iremos chamar de D. Observe que C e D são dois quadripolos totalmente diferentes, pois são gerados por diferentes tipos de associações nos quadripolos originais. Pelo tipo de associação, sabemos que o modelo de admitância do quadripolo D será igual a soma dos modelos de admitância dos quadripolos A e B.

Dos dados do ensaio, sabemos que, para o quadripolo D:

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{0{,}6\ A}{10\ V} = 0{,}06\Omega^{-1}$$

$$Y_{12} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-2{,}1\ A}{10\ V} = -0{,}21\Omega^{-1}$$

Assim, como D = A + B, então A = D – B. Portanto:

$Y_{11A} = 0{,}06 - 0{,}01 = 0{,}05\ \Omega^{-1}$ e $Y_{12A} = -0{,}21 - (-0{,}01) = -0{,}20\ \Omega^{-1}$

A última etapa de solução do problema consiste em, a partir dos valores obtidos de Y_{11A} e Y_{12A} obter os valores que faltam para completar o modelo de impedância (Z_{21A} e Z_{22A}).

Para isso, vamos observar na carta de conversão a expressão de Y_{11} e Y_{12} em função de Z:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z}\ e\ Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z}$$

Assim, dos valores conhecidos de Y_{12} e Z_{12}, calculamos $\Delta Z = 10/0{,}2 = 50\Omega$.

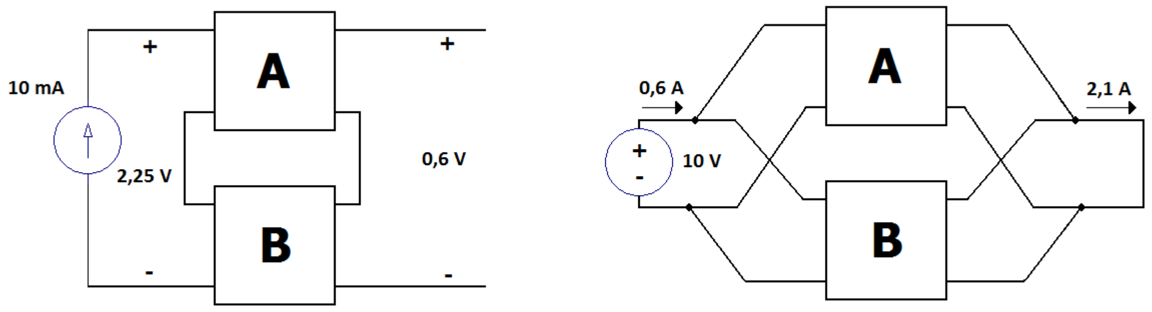
E então calculamos $Z_{22} = 50 * 0{,}05 =$ $2{,}5\ \Omega$.

Finalmente, para calcularmos Z_{21}, utilizamos a expressão de ΔZ:

$$\Delta Z = Z_{11} \times Z_{22} - Z_{12} \times Z_{21} \rightarrow 50 = 2{,}5 \times 100 - 10 \times Z_{21}$$

Portanto: $Z_{21} =$ 20Ω.

2. Prova B: Observe os ensaios abaixo com associação entre os quadripolos A e B.



   a. Sabendo que B é descrito pelo modelo abaixo, obtenha o modelo de impedância do quadripolo A.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1}{20} - \dfrac{2 \times V_2}{5} \\ I_2 = -\dfrac{V_1}{5} + 2 \times V_2 \end{cases}$$

Resposta:

No desenho à esquerda, A e B estão associados em série, resultando em um quadripolo que iremos chamar de C. Pelo formato da associação, sabemos que o modelo de impedância do quadripolo C é igual a soma dos modelos de impedância de A e B.

Como B foi definido pelo modelo de admitância, a primeira etapa da solução do problema é identificar o modelo de impedância de B:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-1}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 10 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Além disso, dos dados do ensaio, sabemos que, para o quadripolo C:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{2{,}25\ V}{10\ mA} = 225\Omega$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0{,}6\ V}{10\ mA} = 60\Omega$$

Assim, como C = A + B, então A = C – B. Portanto:

Z_{11A} = 225 – 100 = 125 Ω e Z_{12A} = 60 – 10 = 50 Ω

Por sua vez, no desenho à direita, A e B estão associados em paralelo, resultando em um quadripolo que iremos chamar de D. Observe que C e D são dois quadripolos totalmente diferentes, pois são gerados por diferentes tipos de associações nos quadripolos originais. Pelo tipo de associação, sabemos que o modelo de admitância do quadripolo D será igual a soma dos modelos de admitância dos quadripolos A e B.

Dos dados do ensaio, sabemos que, para o quadripolo D:

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{0{,}6\ A}{10\ V} = 0{,}06\Omega^{-1}$$

$$Y_{12} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-2{,}1\ A}{10\ V} = -0{,}21\Omega^{-1}$$

Assim, como D = A + B, então A = D – B. Portanto:

Y_{11A} = 0,06 – 0,05 = 0,01 Ω^{-1} e Y_{12A} = -0,21 – (-0,20) = -0,01 Ω^{-1}

A última etapa de solução do problema consiste em, a partir dos valores obtidos de Y_{11A} e Y_{12A} obter os valores que faltam para completar o modelo de impedância (Z_{21A} e Z_{22A}).

Para isso, vamos observar na carta de conversão a expressão de Y_{11} e Y_{12} em função de Z:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z}\ e\ Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z}$$

Assim, dos valores conhecidos de Y_{12} e Z_{12}, calculamos ΔZ = 50/0,01 = 5000Ω.

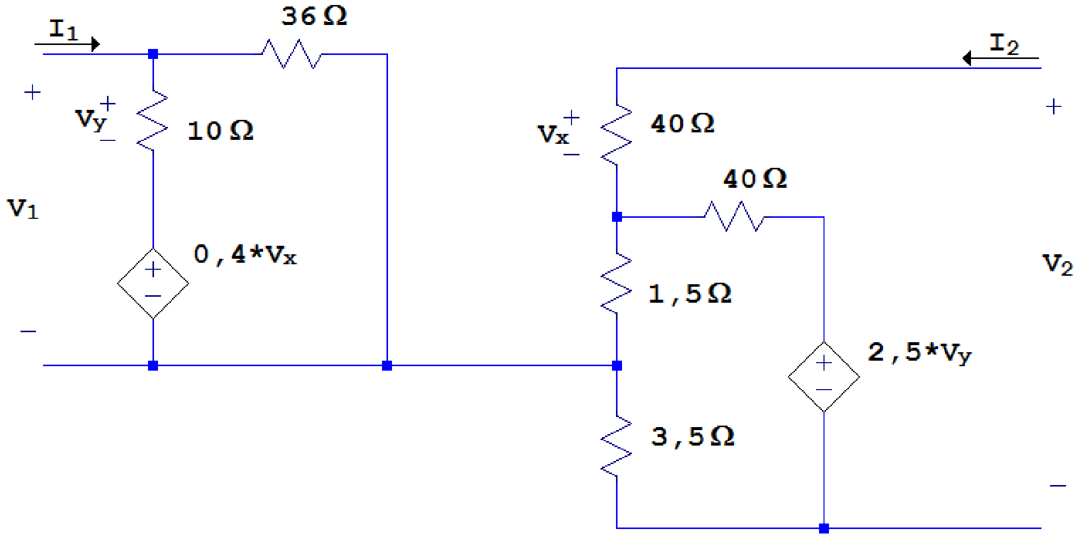
E então calculamos Z_{22} = 5000 * 0,01 = 50 Ω.

Finalmente, para calcularmos Z_{21}, utilizamos a expressão de ΔZ:

$$\Delta Z = Z_{11} \times Z_{22} - Z_{12} \times Z_{21} \rightarrow 5000 = 125 \times 50 - 50 \times Z_{21}$$

Portanto: Z_{21} = 25Ω.

3. SEGUNDA QUESTÃO PARA AS DUAS PROVAS:
   a. Calcule o modelo híbrido do quadripolo abaixo.

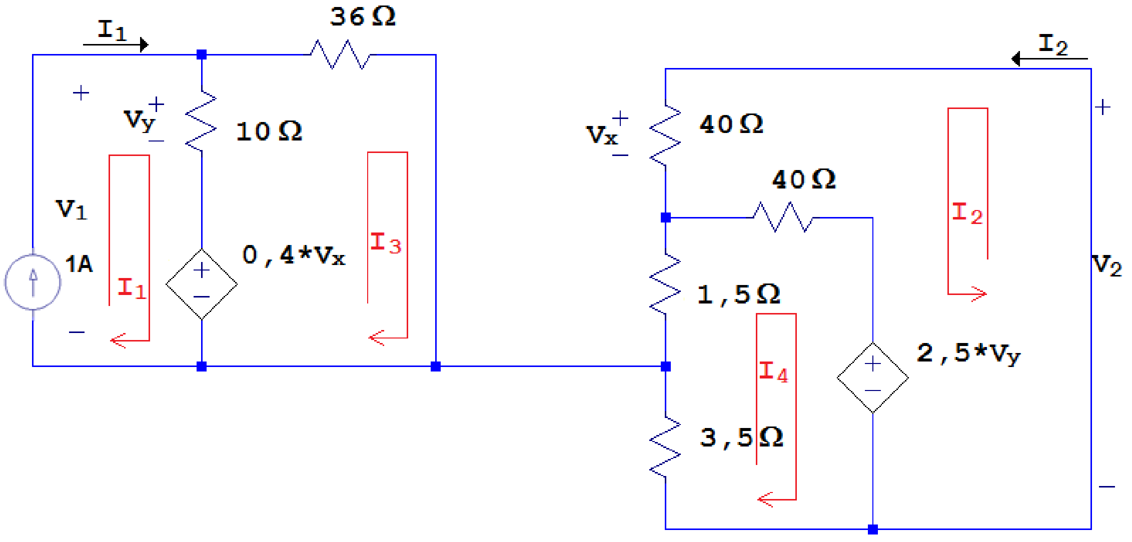


Resposta:

Para calcularmos os parâmetros do modelo híbrido, precisamos realizar dois ensaios. De modo a simplificar os cálculos após a realização dos ensaios, escolhemos para cada ensaio o zeramento de uma das variáveis independentes do modelo, conforme apresentado nas fórmulas abaixo:

$$H_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad H_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$
$$H_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad H_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

Assim, o primeiro ensaio será realizado forçando $V_2 = 0$ e inserindo uma fonte de corrente $I_1 = 1$ A, conforme a figura a seguir.



Nesse ensaio, obtemos o seguinte sistema de equações de malha:

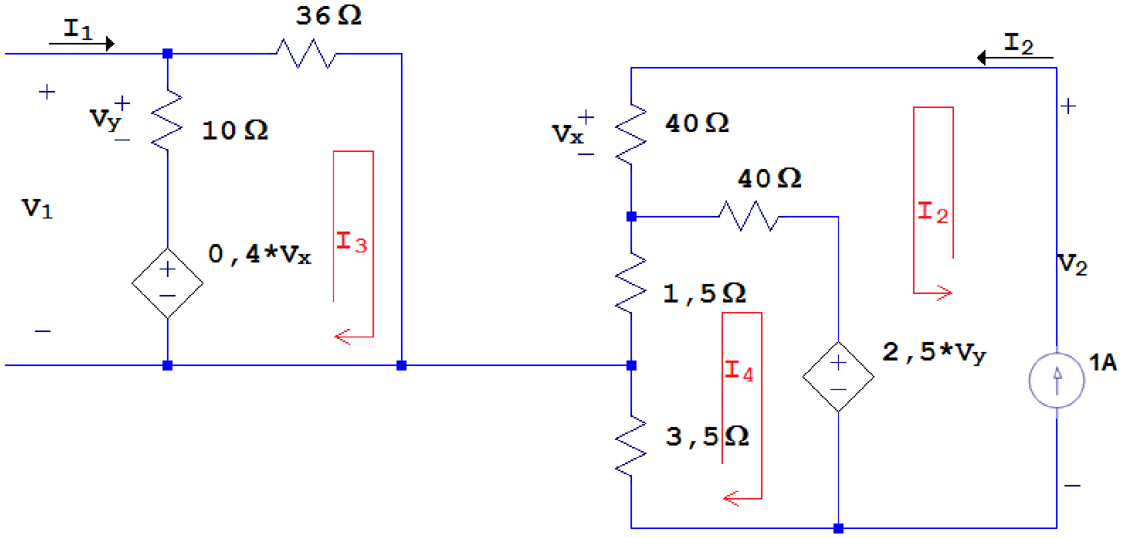
$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ 0{,}4 \times V_x = -10 \times I_1 + 46 \times I_3 \\ 2{,}5 \times V_y = -40 \times I_2 - 45 \times I_4 \\ 2{,}5 \times V_y = -80 \times I_2 - 40 \times I_4 \\ V_y = 10 \times I_1 - 10 \times I_3 \\ V_x = 40 \times I_2 \\ V_1 = V_y + 0{,}4 \times V_x \end{cases}$$

E, da solução desse sistema, temos:

V_y = 8 V, V_x = -2 V, I_2 = -50 mA e V_1 = 7,2V.

Desse modo, H_{11} = 7,2 Ω e H_{21} = -0,05.

Por sua vez, o segundo ensaio será realizado forçando I_1 = 0 e inserindo uma fonte de corrente I_2 = 1 A, conforme a figura a seguir.



Nesse ensaio, obtemos o seguinte sistema de equações de malha:

$$\begin{cases} I_2 = 1 \\ 0{,}4 \times V_x = 46 \times I_3 \\ 2{,}5 \times V_y = -40 \times I_2 - 45 \times I_4 \\ V_y = -10 \times I_3 \\ V_x = 40 \times I_2 \\ V_1 = V_y + 0{,}4 \times V_x \\ V_2 = V_x - 5 \times I_4 \end{cases}$$

E, da solução desse sistema, temos:

$I_3 = \frac{8}{23}$ A, $I_4 = -\frac{16}{23}$ A, V_x = 40 V, $V_y = -\frac{80}{23}$ V, $V_1 = \frac{288}{23}$ V e $V_2 = \frac{1000}{23}$ V.

Desse modo, H_{12} = 0,288 e H_{22} = 0,023 Ω^{-1} .